ESTADISTICA.AR

Variables aleatorias y distribuciones

Estadística · Semana 7 · Unidad 4: Variables aleatorias y distribuciones

PREGUNTA PARA LA CLASE

En Gran Catamarca, el 55,6 % de las personas de 14 años o más está ocupado. Si se eligen 10 al azar, ¿cuántas se espera que estén ocupadas? ¿Qué tan probable es que sean justo esas?

Hoy

1

Variable aleatoria

Un número que depende del azar

2

Esperanza y varianza

El centro y la dispersión de una distribución

3

Binomial y Poisson

Contar éxitos y contar sucesos

4

La distribución normal

La campana, la tipificación y la tabla

5

Aproximación normal y elección

Cuándo usar cada distribución

1

Variable aleatoria

Un número que depende del azar

Una variable aleatoria asigna un número a cada resultado

Discreta

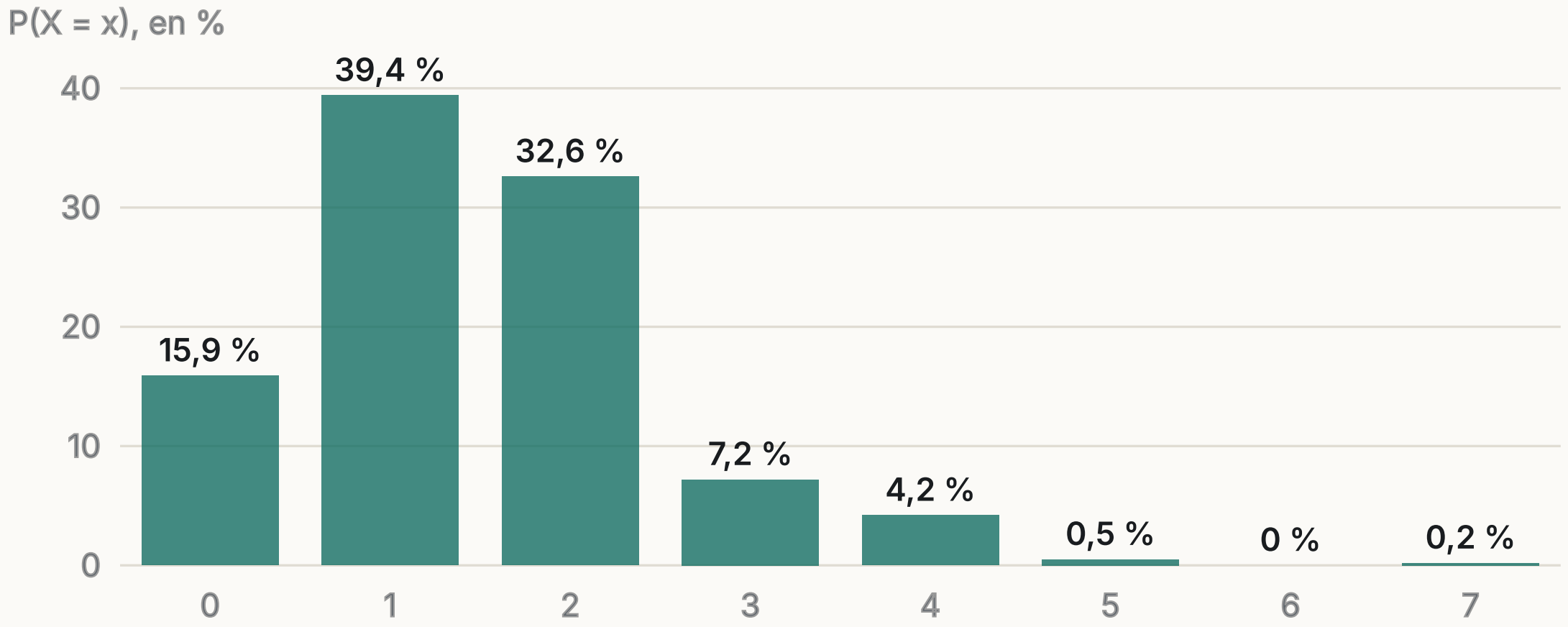
- Toma valores que se pueden contar.
- Personas ocupadas en un hogar: 0, 1, 2…
- Se describe con la **función de probabilidad**, P(X = x).

Continua

- Toma cualquier valor en un intervalo.
- Un tiempo de espera, un peso, una estatura.
- Se describe con la **función de densidad**: la probabilidad es un área.

La función de probabilidad

X: cantidad de personas ocupadas en un hogar elegido al azar entre los 429 encuestados.



Fuente: INDEC, Encuesta Permanente de Hogares, primer trimestre de 2026. Gran Catamarca.

La función de distribución acumulada

$F(x) = P(X \leq x)$: la probabilidad de que la variable valga x o menos.

Como mucho un ocupado

$F(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (68 + 169) / 429 =$ **55,2 %**

Dos o más

$P(X \geq 2) = 1 - F(1) =$ **44,8 %**

Por el complemento, como en la semana 5.

2

Esperanza y varianza

El centro y la dispersión de una distribución

La esperanza y la varianza a mano

Ocupados, x	Hogares	x · hogares	x^2 · hogares
0	68	0	0
1	169	169	169
2	140	280	560
3	31	93	279
4	18	72	288
5	2	10	50
7	1	7	49
Suma	429	631	1.395

$E(X) = \Sigma\, x \cdot P(X = x) = 631 / 429$. $E(X^2) = 1.395 / 429$.

El centro y la dispersión

$E(X) = 1{,}471$

ocupados por hogar, en promedio

$V(X) = 1{,}088$

$E(X^2) - E(X)^2 = 3{,}252 - 1{,}471^2$

$\sigma = 1{,}043$

el desvío estándar, en ocupados

Propiedades que se usan todo el tiempo

Un cambio de escala

$$E(a + bX) = a + b \cdot E(X)$$

$V(a + bX) = b^2 \cdot V(X)$: sumar una constante no cambia la dispersión.

Una suma

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Si X e Y son independientes, también $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

3

Binomial y Poisson

Contar éxitos y contar sucesos

Bernoulli y binomial

Bernoulli

Un solo ensayo con dos resultados: éxito (1) o fracaso (0). Elegir una persona y ver si está ocupada: p = 0,556.

$E(X) = p$ y $V(X) = p(1 - p)$.

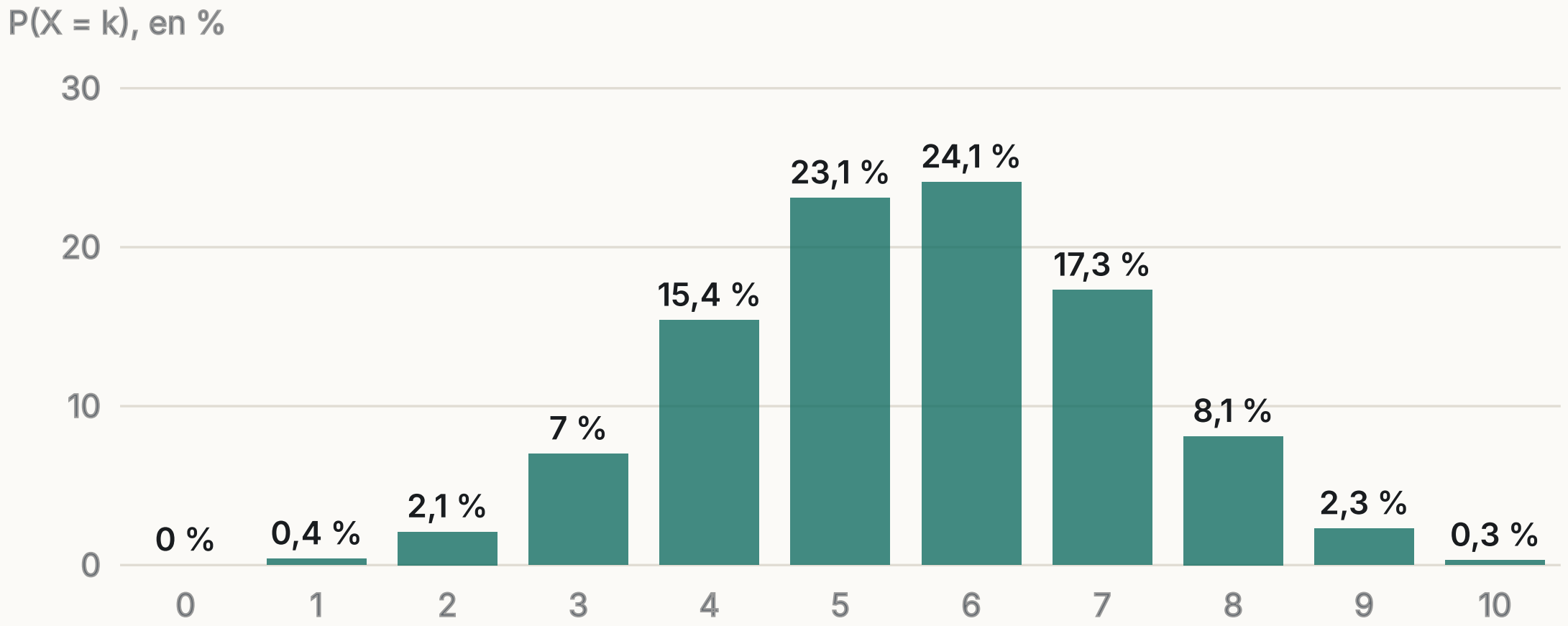
Binomial

La cantidad de éxitos en **n ensayos de Bernoulli independientes** con la misma p.

$E(X) = np$ y $V(X) = np(1 - p)$.

La binomial con n = 10 y p = 0,556

Cantidad de personas ocupadas entre 10 elegidas al azar.



$P(X = k) = C(10, k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{10-k}$: las maneras de elegir cuáles son los k éxitos, por la probabilidad de cada una.

Qué se puede responder con ella

5,56

ocupados esperados: $E(X) = np = 10 \cdot 0{,}556$

1,57

de desvío: $\sqrt{(np(1 - p))}$

10,6 %

de probabilidad de que haya 8 o más: $P(X \geq 8) = 1 - F(7)$

La Poisson: las coces de caballo

Muertes por coz de caballo en un cuerpo de caballería durante un año.

Muertes en el año	Cuerpos-año observados	Esperados con Poisson
0	109	108,7
1	65	66,3
2	22	20,2
3	3	4,1
4 o más	1	0,7
Total	200	200

Fuente: Bortkiewicz (1898), Das Gesetz der kleinen Zahlen. Diez cuerpos de caballería durante veinte años.

La distribución de Poisson

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!, \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Cuenta sucesos

En un intervalo de tiempo, de espacio o de volumen: llamadas por hora, errores por página.

Raros e independientes

A una tasa constante, sin que uno cambie la probabilidad de otro.

Un solo parámetro

λ es la esperanza y también la varianza: $E(X) = V(X) = \lambda$.

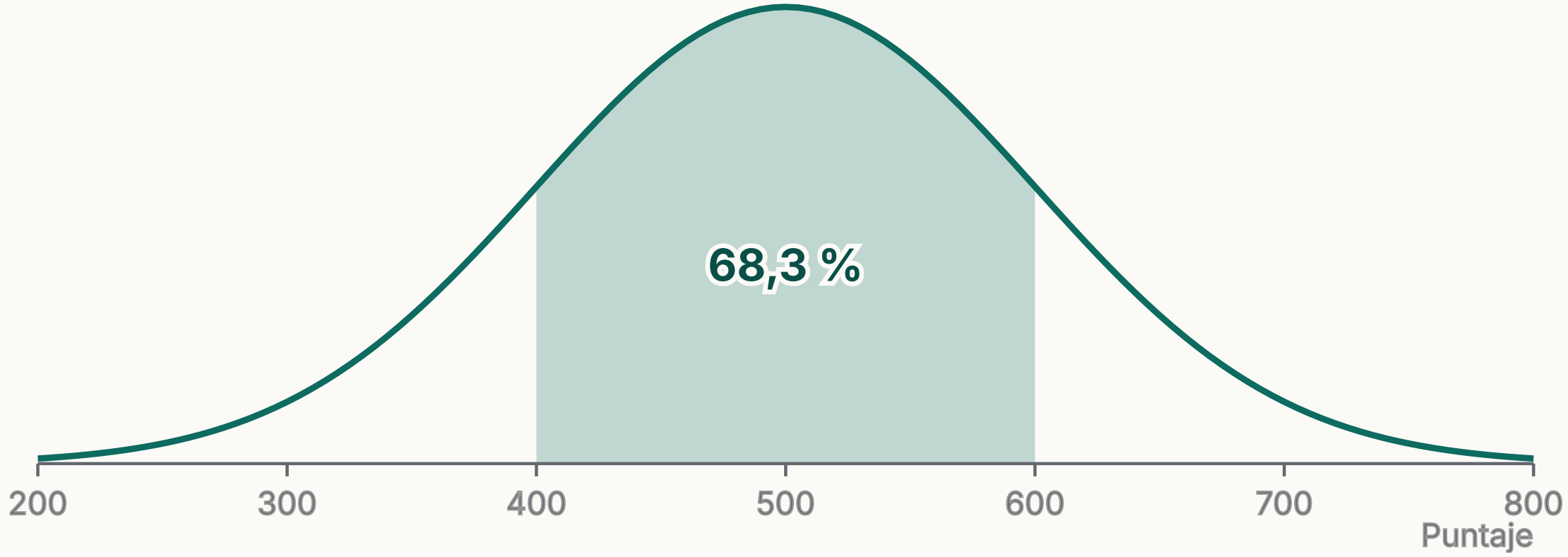
4

La distribución normal

La campana, la tipificación y la tabla

La distribución normal

Puntajes con distribución normal de media μ = 500 y desvío σ = 100, como la escala de las pruebas PISA.



La escala de PISA se fijó con media 500 y desvío 100 entre los países de la OCDE.

La regla 68 – 95 – 99,7

En cualquier normal, la probabilidad de caer a cierta cantidad de desvíos de la media es siempre la misma.

68,3 %

entre μ − σ y μ + σ: de 400 a 600

95,4 %

entre μ − 2σ y μ + 2σ: de 300 a 700

99,7 %

entre μ − 3σ y μ + 3σ: de 200 a 800

La tipificación

$z = (x - \mu) / \sigma$: cuántos desvíos está x por encima o por debajo de la media.

La normal estándar

Si X es normal, $Z = (X - \mu) / \sigma$ es normal con media 0 y desvío 1.

Su función acumulada se llama Φ y es la de la tabla.

Un ejemplo

Un puntaje de 650: $z = (650 - 500) / 100 =$ **1,50**.

Cómo se lee la tabla de la normal

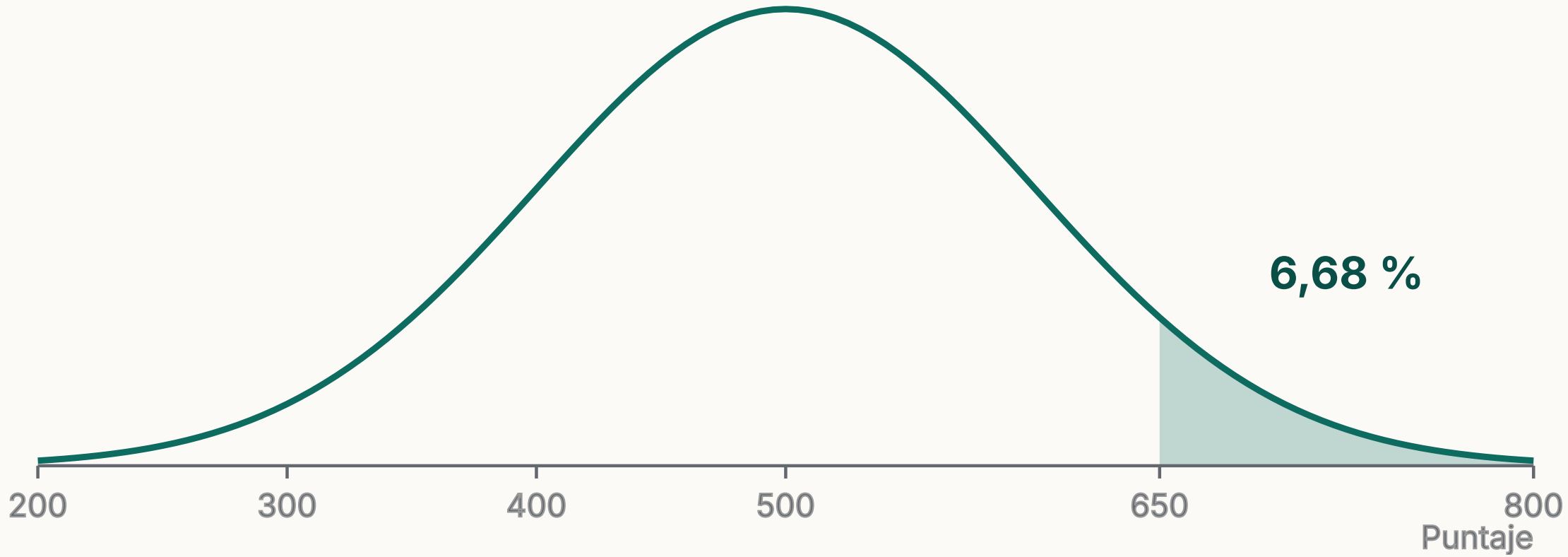
$\Phi(z) = P(Z \leq z)$. La fila da el entero y el primer decimal de z; la columna, el segundo decimal.

z	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
1,2	0,8849	0,8888	0,8925	0,8962	0,8997
1,3	0,9032	0,9066	0,9099	0,9131	0,9162
1,4	0,9192	0,9222	0,9251	0,9279	0,9306
1,5	0,9332	0,9357	0,9382	0,9406	0,9429

Un extracto: la tabla completa va de −3,49 a 3,49.

Una probabilidad con la tabla

$$P(X > 650) = P(Z > 1{,}50) = 1 - \Phi(1{,}50) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

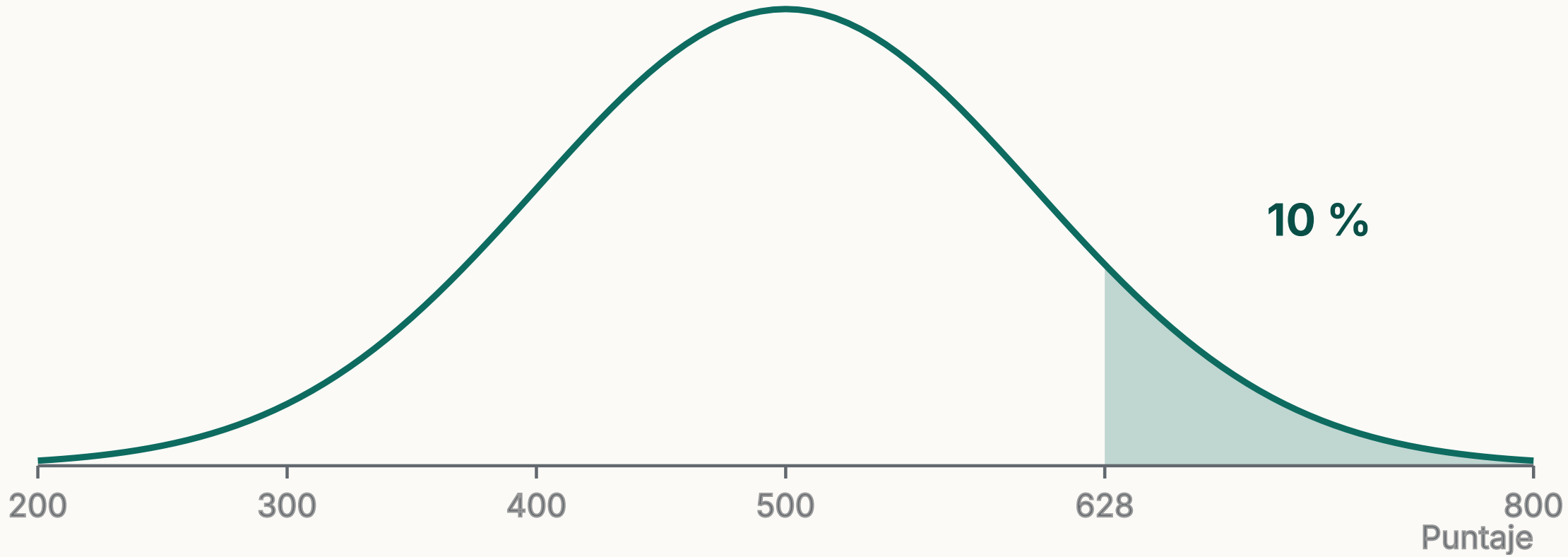


PREGUNTA PARA LA CLASE

¿Qué puntaje hay que superar para estar en el 10 % más alto?

El percentil 90

$x = \mu + z \cdot \sigma = 500 + 1{,}28 \cdot 100 = 628$



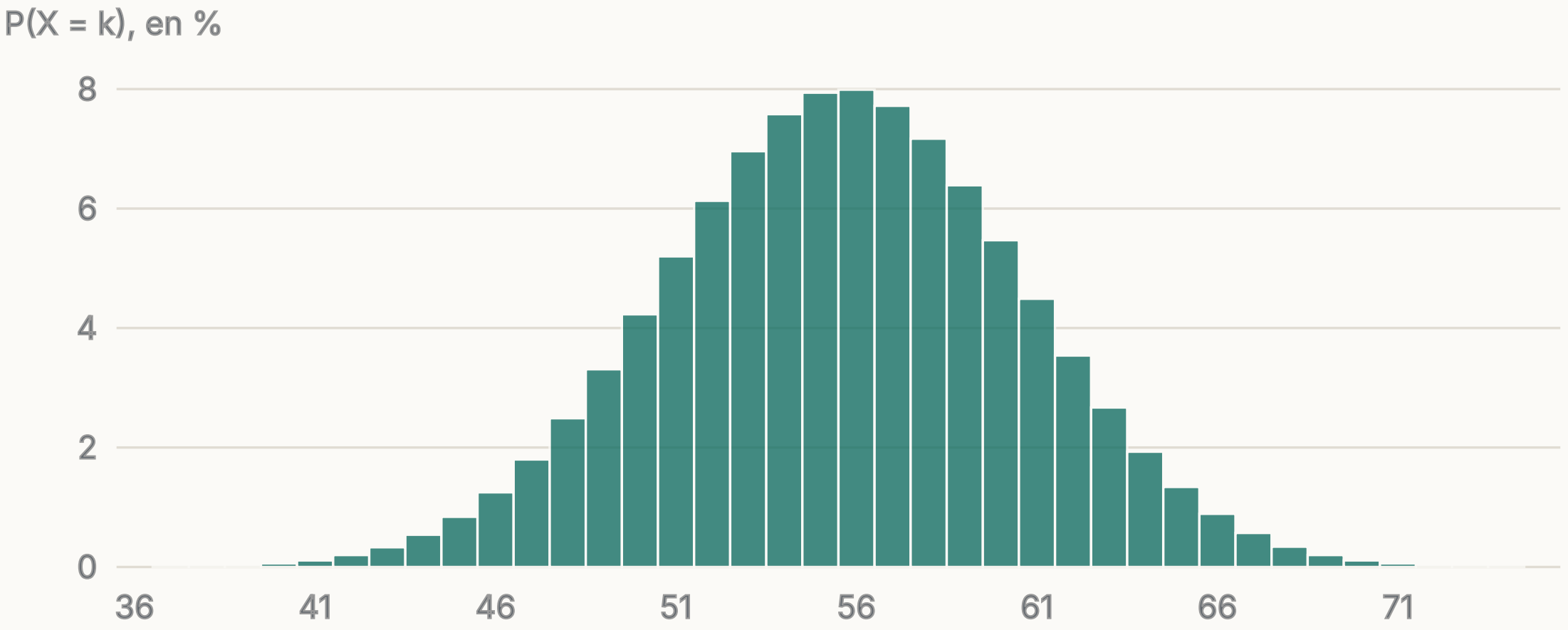
5

Aproximación normal y elección

Cuándo usar cada distribución

La binomial con n = 100 ya parece una normal

Cantidad de ocupados entre 100 personas elegidas al azar, con p = 0,556. De 36 a 75: afuera la probabilidad es casi cero.



La aproximación normal

$P(X \leq 50)$ con X binomial, $n = 100$ y $p = 0{,}556$: $\mu = 55{,}6$ y $\sigma = 4{,}97$.

0,1524

exacta, con la binomial

0,1292

con la normal: $\Phi((50 - 55{,}6) / 4{,}97) = \Phi(-1{,}13)$

0,1515

con corrección por continuidad: $\Phi(-1{,}03)$, usando 50,5

La corrección por continuidad: cada valor entero k de la binomial ocupa en la normal el intervalo de k − 0,5 a k + 0,5.

Cuál usar

Distribución	Describe	Parámetros	Esperanza	Varianza
Bernoulli	Un ensayo con dos resultados	p	p	$p(1 - p)$
Binomial	Éxitos en n ensayos independientes	n, p	np	$np(1 - p)$
Poisson	Sucesos en un intervalo	λ	λ	λ
Normal	Una variable continua en campana	μ, σ	μ	σ^2

Antes de calcular: ¿la variable cuenta o mide? Si cuenta, ¿hay un número fijo de ensayos o un intervalo?

Para llevarse

- Una variable aleatoria se describe con su función de probabilidad (discreta) o de densidad (continua).
- La esperanza es la media de la población; la varianza, su dispersión.
- Binomial: éxitos en n ensayos independientes. Poisson: sucesos raros en un intervalo.
- En la normal, la probabilidad es un área: se tipifica y se lee Φ en la tabla.
- Con n grande, la binomial se aproxima con la normal, mejor con corrección por continuidad.

Guía de trabajo práctico 7
estadistica.ar/docentes/trabajos-practicos/semana-7

Tabla de la normal
estadistica.ar/herramientas/tabla-normal

Simulador de distribuciones
estadistica.ar/herramientas/sim-distribuciones

Ejercicios: normal
estadistica.ar/ejercicios/normal