ESTADISTICA.AR

Probabilidad

Estadística · Semana 5 · Unidad 3: Probabilidad

1 / 32

NOTAS · 1

Pensada para 90 a 120 minutos. Hasta acá se describieron datos que ya estaban; la probabilidad mira para adelante: qué puede pasar y con qué chances. Es la base de toda la inferencia de la segunda mitad del curso.

PREGUNTA PARA LA CLASE

Una mujer de 40 años se hace una mamografía de control y da positiva. ¿Qué probabilidad hay de que tenga cáncer de mama?

a) Alrededor del 90 %

b) Alrededor del 70 %

c) Alrededor del 50 %

d) Menos del 10 %

2 / 32

NOTAS · 2

Los datos que se le dan al médico: el 1 % de las mujeres de esa edad tiene cáncer de mama; la mamografía da positiva en el 80 % de las que lo tienen y en el 9,6 % de las que no. Que voten sin hacer cuentas. La respuesta es la d), 7,8 %, y se resuelve en la parte 5.

En los estudios que hicieron esta pregunta a médicos, la mayoría contestó muy por encima. No es falta de inteligencia: es que las probabilidades condicionales se confunden con facilidad. Para eso es la clase.



NOTAS · 3

El conteo (combinaciones, variaciones) queda para el práctico: es una herramienta para aplicar la definición clásica cuando los casos son muchos.



SEMANA 5 · EXPERIMENTO ALEATORIO Y ESPACIO MUESTRAL

El experimento aleatorio

Se puede repetir
En las mismas condiciones, todas las veces que se quiera, al menos en teoría.

Se conocen los resultados
Antes de hacerlo se sabe qué puede salir.

No se sabe cuál saldrá
El resultado de cada repetición es incierto.

5 / 32

NOTAS · 5

El contraste es con un experimento determinístico: soltar una piedra y medir cuánto tarda en caer da siempre lo mismo, salvo el error de medición. Tirar un dado, no.

Elegir al azar una persona de la EPH también es un experimento aleatorio: se sabe quiénes pueden salir, no quién va a salir.

SEMANA 5 · EXPERIMENTO ALEATORIO Y ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral: todos los resultados posibles

Experimento	Espacio muestral, Ω	Resultados
Tirar un dado	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	6
Tirar dos monedas	{CC, CX, XC, XX}	4
Tirar dos dados	Los pares (1, 1), (1, 2), …, (6, 6)	36
Elegir al azar una persona de la tabla de hoy	Las personas encuestadas	1.134
Esperar el colectivo	Cualquier tiempo desde 0	Infinitos

Los cuatro primeros son finitos y se pueden contar; el último es continuo, como los que vienen en la unidad 4.

6 / 32

NOTAS · 6

Con dos monedas, CX y XC son resultados distintos: la primera moneda es cara y la segunda ceca, o al revés. Si se los junta en «una cara y una ceca», el espacio tiene tres resultados que no son igualmente probables.

SEMANA 5 · EXPERIMENTO ALEATORIO Y ESPACIO MUESTRAL

Eventos y sus operaciones

Evento
Un conjunto de resultados. «Sumar 7 con dos dados» son 6 de los 36 pares.

Complemento
Ā ocurre cuando A no ocurre: no sumar 7.

Unión, A ∪ B
Ocurre A, o B, o los dos: «A o B».

Intersección, A ∩ B
Ocurren A y B a la vez: «A y B».

7 / 32

NOTAS · 7

Los pares que suman 7: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) y (6, 1). Conviene escribirlos en el pizarrón: se usan en la diapositiva que sigue.

Un diagrama de Venn dibujado a mano ayuda con la unión y la intersección. El «o» de la probabilidad es inclusivo: incluye el caso en que ocurren los dos.

2

Tres maneras de definir la probabilidad

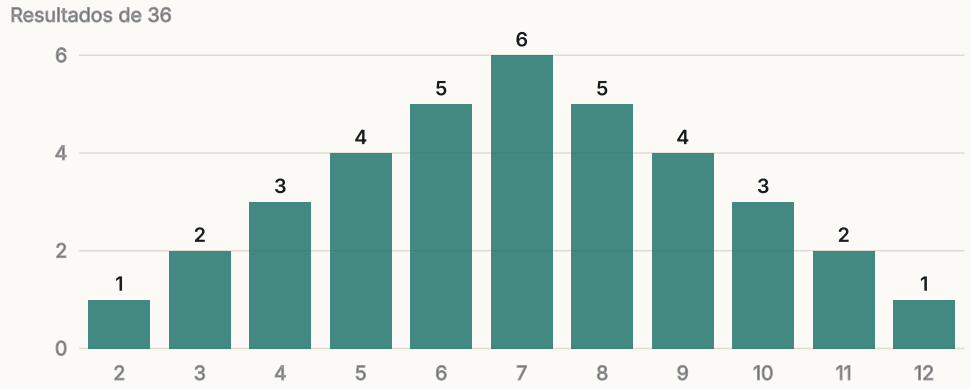
Clásica, frecuencial y subjetiva

8 / 32

SEMANA 5 · TRES MANERAS DE DEFINIR LA PROBABILIDAD

Las sumas de dos dados

De los 36 resultados igualmente probables, cuántos dan cada suma.



La definición clásica: P(sumar 7) = casos favorables / casos posibles = 6 / 36 = 1/6.

9 / 32

NOTAS · 9

Solo vale si todos los resultados del espacio muestral son igualmente probables, como los 36 pares de dos dados equilibrados. Y no hace falta tirar nada: la probabilidad sale de contar.

PREGUNTA PARA LA CLASE

La suma de dos dados puede ser 2, 3, …, 12: once resultados. ¿La probabilidad de sumar 7 es entonces 1/11?

10 / 32

NOTAS · 10

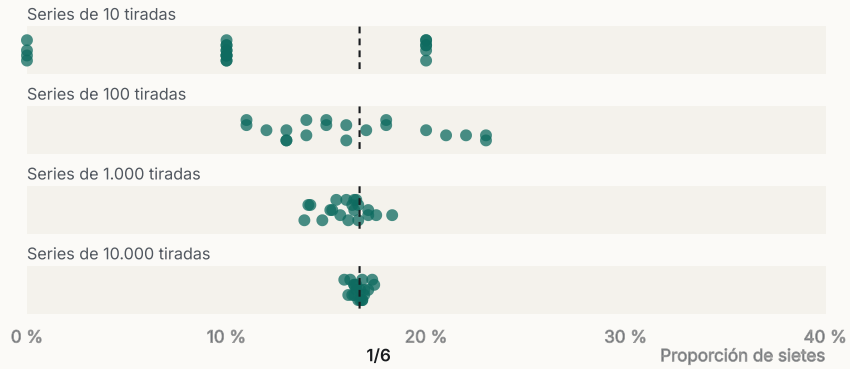
No. Las once sumas no son igualmente probables: el 7 sale de seis pares y el 2, de uno solo. La definición clásica cuenta resultados igualmente probables, y las sumas no lo son: los pares sí.

Es el mismo error que «o me toca la lotería o no: 50 %». El práctico tiene un ejercicio para discutir con razonamientos así.

SEMANA 5 · TRES MANERAS DE DEFINIR LA PROBABILIDAD

La frecuencia relativa se estabiliza

20 series simuladas de cada tamaño. Cada punto es la proporción de sietes en una serie de tiradas de dos dados.



La definición frecuencial: la probabilidad es el valor al que se acerca la frecuencia relativa cuando las repeticiones aumentan.

11 / 32

NOTAS · 11

Con 10 tiradas, la proporción de sietes va de 0 % a 20 %; con 10.000, de 15,9 % a 17,4 %. Es la ley de los grandes números.

Lo que la ley no dice es que los resultados se compensen: si en una serie salieron pocos sietes, en la siguiente no tienen por qué salir más. Las rachas no se corrigen, se diluyen entre muchísimas tiradas.

La definición frecuencial sirve donde la clásica no llega: un dado cargado, la probabilidad de que un recién nacido sea varón, la de que un paciente responda a un tratamiento.

SEMANA 5 · TRES MANERAS DE DEFINIR LA PROBABILIDAD

Tres definiciones

Clásica	Frecuencial	Subjetiva
Casos favorables sobre casos posibles.	La frecuencia relativa en muchas repeticiones.	El grado de confianza de una persona en que algo ocurra.
Solo con resultados igualmente probables.	Solo para lo que se puede repetir.	Para lo único: una elección, un juicio.

12 / 32

NOTAS · 12

No compiten: cada una sirve en un terreno. Las tres cumplen las mismas reglas, que son las de la diapositiva siguiente.

La subjetiva no es cualquier cosa: una persona coherente no puede asignar probabilidades que violen las reglas, porque se le podría armar una apuesta en la que pierde siempre.

SEMANA 5 · TRES MANERAS DE DEFINIR LA PROBABILIDAD

Las reglas que cumple toda probabilidad

Entre 0 y 1
$0 \le P(A) \le 1$ para cualquier evento A.

Algo ocurre
$P(\Omega) = 1$: el espacio muestral es seguro.

Excluyentes, se suman
Si A y B no pueden ocurrir juntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

El complemento
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

P(no sumar 7) = 1 − 6/36 = 30/36.

13 / 32

NOTAS · 13

Las tres primeras son los axiomas de Kolmogorov (1933): todo lo demás se deduce de ellas. La del complemento sale de las dos últimas, porque A y $\bar{A}$ son excluyentes y juntos forman Ω.

El complemento es el atajo más útil: «al menos uno» suele ser más fácil de calcular como 1 − P(ninguno).

3

La regla de la suma

Eventos excluyentes y los que no

14 / 32

SEMANA 5 · LA REGLA DE LA SUMA

Sexo y condición de actividad

Personas encuestadas en Gran Catamarca. Se elige una al azar.

	Ocupada	Desocupada	Inactiva	Total
Varón	346	17	179	542
Mujer	284	9	299	592
Total	630	26	478	1.134

Fuente: INDEC, Encuesta Permanente de Hogares, primer trimestre de 2026. Gran Catamarca, personas de 14 años o más.

15 / 32

NOTAS · 15

Elegir una persona al azar hace que las 1.134 sean igualmente probables, y entonces cada probabilidad es casos favorables sobre casos posibles: se cuenta en la tabla.

Llamemos M a «mujer», O a «ocupada» y D a «desocupada». Inactiva es quien no trabaja ni busca trabajo: estudiantes, jubilados, quienes se ocupan de su casa.

SEMANA 5 · LA REGLA DE LA SUMA

Eventos excluyentes: se suman

Nadie puede estar ocupado y desocupado a la vez.

0,556

P(O) = 630 / 1.134

0,023

P(D) = 26 / 1.134

0,578

P(O ∪ D) = P(O) + P(D): la probabilidad de ser activo

16 / 32

NOTAS · 16

Contando: activos son los ocupados más los desocupados, 656 de 1.134. La suma funciona porque ninguna persona se cuenta dos veces.

PREGUNTA PARA LA CLASE

P(mujer) = 0,522 y P(ocupada) = 0,556. Si se las suma da 1,078. ¿Qué salió mal?

17 / 32

NOTAS · 17

Una probabilidad no puede pasar de 1. Mujer y ocupada no son excluyentes: las 284 mujeres ocupadas se contaron dos veces, una entre las mujeres y otra entre los ocupados. Hay que restarlas una vez.

SEMANA 5 · LA REGLA DE LA SUMA

La regla general de la suma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Mujer y ocupada

$P(M \cap O) = 284 / 1.134 = 0,250$

Mujer u ocupada

$P(M \cup O) = (592 + 630 - 284) / 1.134 =$ **0,827**

Por el complemento

Todos menos los varones no ocupados: $1 - 196 / 1.134 = 0,827$

18 / 32

NOTAS · 18

Si A y B son excluyentes, $P(A \cap B) = 0$ y la regla general se reduce a la de los axiomas.

La tercera tarjeta es el control: el complemento de «mujer u ocupada» es «varón y no ocupado».

4

Probabilidad condicional e independencia

Cuando saber algo cambia las chances

19 / 32

SEMANA 5 · PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

La probabilidad condicional

P(A | B) = P(A ∩ B) / P(B): la probabilidad de A cuando se sabe que ocurrió B.

55,6 %

P(O): ocupadas entre todas las personas, 630 / 1.134

63,8 %

P(O | V): entre los varones, 346 / 542

48,0 %

P(O | M): entre las mujeres, 284 / 592

20 / 32

NOTAS · 20

Condicionar es achicar el espacio muestral: si se sabe que la persona elegida es mujer, las posibles ya no son todas, son las mujeres. En la tabla, es leer una sola fila.

Con la fórmula: P(O | M) = P(O ∩ M) / P(M) = 0,250 / 0,522 = 0,480.

PREGUNTA PARA LA CLASE

¿Es lo mismo la probabilidad de ser mujer entre los inactivos que la de ser inactiva entre las mujeres?

21 / 32

NOTAS · 21

No. P(M | inactiva) = 299 / 478 = 62,6 %: de cada 100 inactivos, unos 63 son mujeres. P(inactiva | M) = 299 / 592 = 50,5 %: la mitad de las mujeres es inactiva.

El numerador es el mismo; cambia el total por el que se divide. Confundir P(A | B) con P(B | A) es el error más común con probabilidades, y es el de la mamografía del principio.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

Independencia

A y B son independientes si $P(A \mid B) = P(A)$: saber que ocurrió B no cambia la probabilidad de A. Equivale a $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Sexo y ocupación

$P(M) \cdot P(O) = 0{,}522 \cdot 0{,}556 = 0{,}290$, pero $P(M \cap O) = 0{,}250$.

No son independientes.

Dos dados

$P(6 \text{ y } 6) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

Un dado no sabe lo que salió en el otro.

22 / 32

NOTAS · 22

En la tabla se ve sin la fórmula: P(O | M) = 48,0 % no es P(O) = 55,6 %. Que no sean independientes en la muestra es una descripción; si lo son en la población es una pregunta de inferencia, y se responde con la prueba chi cuadrado de la unidad 5.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

La regla del producto

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Sin reposición

Dos ases seguidos de un mazo de 40 cartas: 4/40 · 3/39 = 0,0077

La segunda carta depende de la primera.

Con reposición

Se devuelve la primera y se mezcla: 4/40 · 4/40 = 0,0100

Independientes: $P(B \mid A) = P(B)$.

23 / 32

NOTAS · 23

Es la definición de probabilidad condicional despejada. Se lee como un recorrido: primero ocurre A, y después B sabiendo que ocurrió A.

Con poblaciones grandes, sacar con o sin reposición casi no cambia nada: por eso en una encuesta se suele tratar a las personas elegidas como independientes.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

Excluyentes no es lo mismo que independientes

Excluyentes

- No pueden ocurrir juntos.
- $P(A \cap B) = 0$.
- Ocupada y desocupada.

Independientes

- Uno no cambia la probabilidad del otro.
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- El primer dado y el segundo.

Dos eventos excluyentes, cada uno con probabilidad positiva, nunca son independientes: si ocurre uno, el otro queda en cero.

24 / 32

NOTAS · 24

Es una confusión frecuente en los parciales. Excluyentes es una propiedad de los conjuntos (no se tocan); independientes, de las probabilidades. Saber que alguien está ocupado dice todo sobre si está desocupado: que no.

5

Probabilidad total y teorema de Bayes

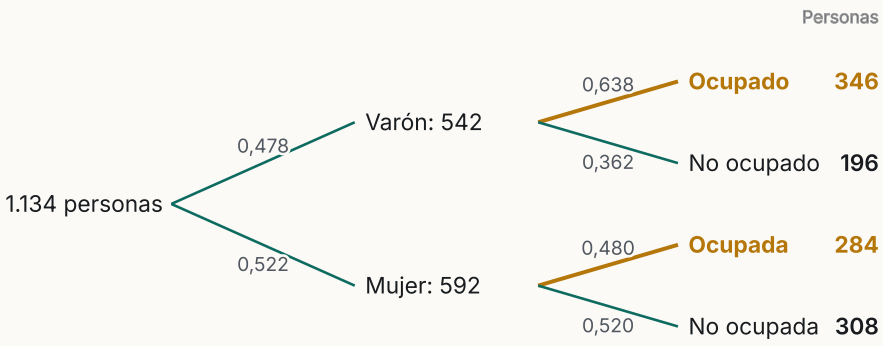
Dar vuelta una probabilidad condicional

25 / 32

SEMANA 5 · PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

El diagrama de árbol

La misma tabla, recorrida primero por sexo y después por ocupación. Cada rama lleva su probabilidad condicional.



Las dos hojas resaltadas son las personas ocupadas: 346 + 284 = 630.

26 / 32

NOTAS · 26

Las probabilidades que salen de un mismo nodo suman 1. Recorrer un camino es aplicar la regla del producto: la probabilidad de la hoja «varón y ocupado» es $P(V) \cdot P(O \mid V)$.

En el práctico los árboles se arman al revés: con las probabilidades de las ramas como dato, para llegar a las hojas.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

Probabilidad total y Bayes

Probabilidad total

$P(O) = P(O \mid V) \cdot P(V) + P(O \mid M) \cdot P(M) =$
$0{,}638 \cdot 0{,}478 + 0{,}480 \cdot 0{,}522 =$ **0,556**

Sumar todos los caminos que llegan a «ocupado».

Teorema de Bayes

$P(M \mid O) = P(O \mid M) \cdot P(M) / P(O) = 0{,}480 \cdot$
$0{,}522 / 0{,}556 =$ **0,451**

Contando: 284 / 630.

27 / 32

NOTAS · 27

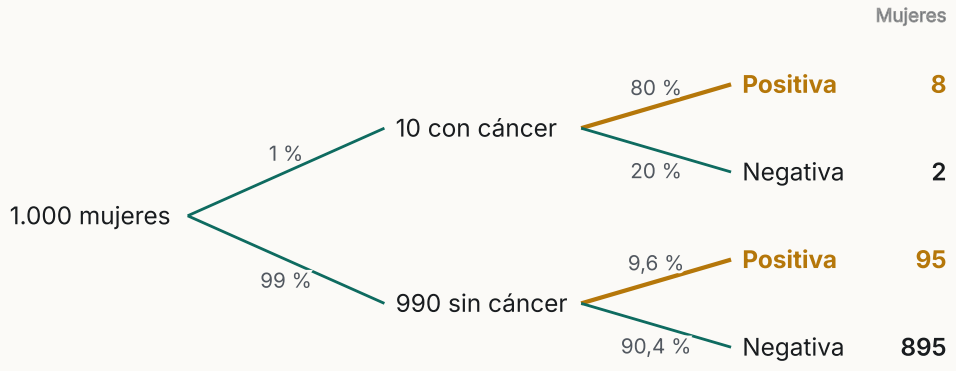
Probabilidad total: cuando un evento puede ocurrir por varios caminos excluyentes, su probabilidad es la suma de la de cada camino.

Bayes da vuelta la condicional: el árbol da P(O | M), y Bayes calcula P(M | O), de cada 100 ocupados, cuántos son mujeres. El denominador es la probabilidad total de la tarjeta de al lado.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

La mamografía, en frecuencias naturales

1.000 mujeres de 40 años que se hacen una mamografía de control.



Fuente: Gigerenzer y Hoffrage (1995), Psychological Review 102: 684-704.

28 / 32

NOTAS · 28

Las mamografías positivas son las dos hojas resaltadas: 8 + 95 = 103. De ellas, solo 8 son de mujeres con cáncer.

Pensar en cantidades de personas en lugar de probabilidades —frecuencias naturales— es lo que Gigerenzer y Hoffrage propusieron: con este formato, muchas más personas llegan a la respuesta correcta.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

La respuesta a la pregunta del principio

P(cáncer | +) = 0,80 · 0,01 / (0,80 · 0,01 + 0,096 · 0,99) = 0,078

7,8 %

de las mamografías positivas son de mujeres con cáncer: 8 de 103

92,2 %

son falsos positivos: 95 de 103

La prueba no es mala: la enfermedad es rara, y los falsos positivos de las muchas mujeres sanas superan a los verdaderos positivos de las pocas enfermas.

29 / 32

NOTAS · 29

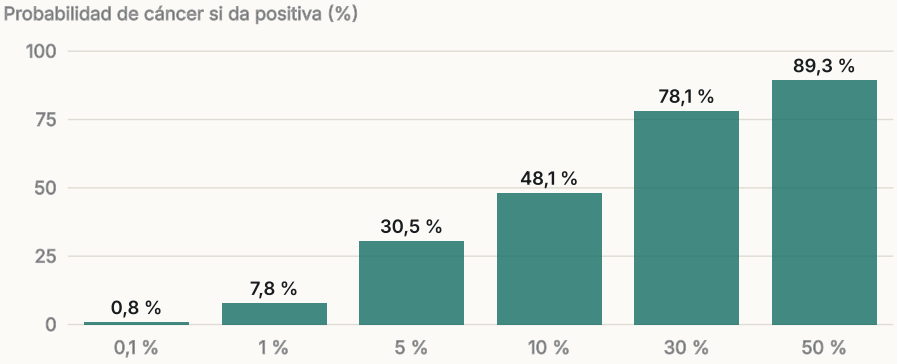
Volver a la votación del principio. El 80 % es P(+ | cáncer), la sensibilidad; lo que preguntaba era P(cáncer | +). Es el error de dar vuelta la condicional, el mismo de las mujeres y los inactivos.

Por eso un positivo en un tamizaje no es un diagnóstico: se confirma con un estudio más preciso, como una biopsia.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

La misma prueba, otra prevalencia

Probabilidad de tener cáncer si la mamografía da positiva, según la prevalencia: qué tan común es la enfermedad entre quienes se hacen la prueba.



La sensibilidad y la especificidad son de la prueba; el valor predictivo depende además de la prevalencia.

30 / 32

NOTAS · 30

Con la prevalencia del 1 %, 7,8 %; si la mitad de las personas estuviera enferma, 89,3 %. El mismo resultado positivo significa cosas distintas en un tamizaje de toda la población y en un consultorio al que llegan pacientes con síntomas.

En Bayes, la prevalencia es la probabilidad a priori: lo que se sabía antes de la prueba. La prueba la actualiza, pero no la reemplaza.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

Tres probabilidades que no hay que confundir

Nombre	Probabilidad	En la mamografía	Depende de la prevalencia
Sensibilidad	P(+ | enfermo)	80 %	No
Especificidad	P(− | sano)	90,4 %	No
Valor predictivo positivo	P(enfermo | +)	7,8 %	Sí

La sensibilidad le importa a quien diseña la prueba; el valor predictivo, a quien recibe el resultado.

31 / 32

NOTAS · 31

La calculadora de diagnóstico de estadistica.ar hace estas cuentas para cualquier prueba y cualquier prevalencia. El práctico tiene una prueba de tamizaje para resolver a mano, con otros números.

SEMANA 5 · PROBABILIDAD

Para llevarse

- La probabilidad se define por casos igualmente probables, por frecuencias o por grados de confianza, y siempre cumple las mismas reglas.
- Si dos eventos no son excluyentes, al sumar se resta la intersección.
- Condicionar es achicar el espacio muestral; P(A | B) y P(B | A) son cosas distintas.
- Independientes no es lo mismo que excluyentes.
- Bayes da vuelta una condicional, y la prevalencia pesa más de lo que parece.

Guía de trabajo práctico 5
estadistica.ar/docentes/trabajos-practicos/semana-5

Calculadora de diagnóstico
estadistica.ar/herramientas/calc-diagnostico

Teorema de Bayes
estadistica.ar/conceptos/teorema-de-bayes

Ejercicios: reglas de probabilidad
estadistica.ar/ejercicios/reglas-de-probabilidad

32 / 32

NOTAS · 32

Para el práctico: calculadora y, para el ejercicio del cumpleaños, R, Python o una planilla.